ХОРОШИСТ

Математика · 8 класс

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ

Квадратные корни

С нуля: от определения корня до заданий ОГЭ и задач повышенной сложности

15 разделов | 400 заданий | ответы и решения в конце

Ученик _____ Начало работы _____

$x^2 = a \Rightarrow x = \pm\sqrt{a}$

$\sqrt{a^2} = |a|$

$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

$\sqrt{2} \approx 1{,}414\ldots$

$(\sqrt{a})^2 = a$

Как работать с тетрадью

1. Прочитай «Зачем» и теорию раздела. Блок «Откуда правило» объясняет, почему формула верна, — его стоит разобрать хотя бы раз.
2. Разбери примеры: закрой решение, попробуй сам, потом сравни.
3. Решай в тетради по группам, от ● к ●●●. Каждый ответ сверяй в конце тетради сразу после группы.
4. Посмотри «Типичные ошибки» перед проверкой — чаще всего неверный ответ совпадает с одной из них.
5. Заполни таблицу прогресса. Меньше 80 % верных — перечитай теорию и реши группу ещё раз.

ПЕРЕД НАЧАЛОМ

Маршруты по тетради

Первое знакомство с темой

1 → 2 → 3 → 4 → 5

Начало четверти: определение, уравнения, оценка корня, график.

Основная программа 8 класса

6 → 7 (A, B) → 8 → 9 → 10 → 11 → 12

Свойства корня и преобразования — основа контрольных.

Подготовка к ОГЭ

2 → 4 → 6 → 8 → 10 → 11 → 12 → 14

Всё, что нужно для заданий с корнями в первой части.

Выше программы

7 (C, D) → 13 → ★

Модуль, сокращение дробей, двойные радикалы, олимпиадные идеи.

Уровень группы заданий: ●○○ базовый · ●●○ средний · ●●● повышенный

Таблица прогресса

№	Раздел	Заданий	Дата	Верно	Повторить
1	Квадрат числа	33			
2	Арифметический квадратный корень	44			
3	Уравнения $x^2 = a$ и $\sqrt{x} = a$	37			
4	Иррациональные числа. Оценка и сравнение корней	31			
5	Функция $y = \sqrt{x}$ и её график	31			
6	Корень из произведения и из частного	37			
7	Корень из квадрата: $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$	27			
8	Вынесение множителя из-под знака корня	34			
9	Внесение множителя под знак корня. Сравнение	22			
10	Подобные радикалы: сложение и вычитание	24			
11	Умножение выражений с корнями. Формулы сокращённого умножения	24			
12	Освобождение от иррациональности в знаменателе	17			
13	Сокращение дробей с корнями	13			
14	Задания в формате ОГЭ	16			
★	Задачи повышенной сложности	10			

Раздел освоен, если верно решено не меньше 80 % заданий групп ● и ●●. Группа ●●● — дополнительная.

ВСЕГДА ПОД РУКОЙ

Справочник

Определение разд. 2

$\sqrt{a} = b \iff b \geq 0$ и $b^2 = a$

$\sqrt{a}$ имеет смысл при $a \geq 0$

$(\sqrt{a})^2 = a,\ \sqrt{a} \geq 0$

Уравнения разд. 3

$x^2 = a$: $a > 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{a}$;

$a = 0 \Rightarrow x = 0$; $a < 0$ – нет корней

$\sqrt{x} = a$: $a \geq 0 \Rightarrow x = a^2$; $a < 0$ – нет корней

Сравнение разд. 4, 9

$0 \leq a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$

5 и $\sqrt{24}$: сравниваем 25 и 24

$3\sqrt{5} = \sqrt{45}$ – внесение для сравнения

Функция $y = \sqrt{x}$ разд. 5

$D(y)$: $x \geq 0$; значения $y \geq 0$; возрастает

Точки: $(0;0)$, $(1;1)$, $(4;2)$, $(9;3)$

Произведение и частное разд. 6

$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\ \ (a, b \geq 0)$

$\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\ \ (a \geq 0,\ b > 0)$

Корень из квадрата разд. 7

$\sqrt{a^2} = |a|$ при любом a

$\sqrt{a^4} = a^2,\ \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = \sqrt{2} - 1$

Вынесение и внесение разд. 8, 9

$\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}\ \ (a, b \geq 0)$: $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$-a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2 b}$: $-2\sqrt{5} = -\sqrt{20}$

Подобные и ФСУ разд. 10, 11

$3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$; $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ не упрощается

$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$

$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$

Знаменатель без корня разд. 12, 13

$\dfrac{c}{\sqrt{b}} = \dfrac{c\sqrt{b}}{b}$; $\dfrac{c}{\sqrt{a} + b} = \dfrac{c(\sqrt{a} - b)}{a - b^2}$

$x - 9 = (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)$

Таблица квадратов чисел от 10 до 99

Строка – десятки, столбец – единицы. Пример: 47^2 – строка 4, столбец 7: 2209. Таблица работает и в обратную сторону: $\sqrt{2209} = 47$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Полезные приближения. $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ $\sqrt{3} \approx 1{,}732$ $\sqrt{5} \approx 2{,}236$ $\sqrt{6} \approx 2{,}449$ $\sqrt{7} \approx 2{,}646$ $\sqrt{8} \approx 2{,}828$ $\sqrt{10} \approx 3{,}162$

1

ЧАСТЬ I · ОСНОВА

Квадрат числа

33 заданий

ЗАЧЕМ Квадратный корень — действие, обратное возведению в квадрат. Кто уверенно и быстро возводит в квадрат, тот быстро извлекает корни. Этот раздел — разминка перед темой.

ТЕОРИЯ

Квадрат числа a — произведение двух одинаковых множителей: $a^2 = a \cdot a$.

- Квадрат любого числа неотрицателен: $a^2 \geq 0$. Квадраты противоположных чисел равны: $(-a)^2 = a^2$.
- Скобки важны: $(-8)^2 = 64$, а запись -8^2 означает $-(8^2) = -64$.
- Квадрат дроби: числитель и знаменатель возводят в квадрат: $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$. Смешанное число сначала переводят в неправильную дробь.
- Квадрат десятичной дроби: число знаков после запятой **удваивается**: $0{,}07^2 = 0{,}0049$ (2 знака → 4 знака).
- Квадрат натурального числа может оканчиваться только цифрами 0, 1, 4, 5, 6, 9.

ОТКУДА ПРАВИЛО

Почему знаков после запятой становится вдвое больше? Запишем десятичную дробь обыкновенной: $0{,}07^2 = \frac{7}{100} \cdot \frac{7}{100} = \frac{49}{10\,000} = 0{,}0049$. Знаменатель 100 (два нуля) умножается сам на себя и даёт $10\,000$ (четыре нуля).

Почему квадрат не оканчивается на 2, 3, 7, 8? Последняя цифра квадрата зависит только от последней цифры числа: $0^2, 1^2, \ldots, 9^2$ оканчиваются на 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1. Цифр 2, 3, 7, 8 в этом списке нет.

ТИПИЧНЫЕ ОШИБКИ

✗ $-8^2 = 64$	В квадрат возводится только 8, минус остаётся: $-8^2 = -64$.
✗ $0{,}3^2 = 0{,}9$	Знаков после запятой должно стать два: $0{,}3^2 = 0{,}09$.
✗ $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}$	Знаменатель тоже возводится в квадрат: $\frac{4}{9}$.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЕМ

Пример 1. $1{,}2^2$

$12^2 = 144$; знаков после запятой было 1, станет 2: $1{,}2^2 = 1{,}44$.

Пример 2. $\left(1\frac{1}{2}\right)^2$

$1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$.

Пример 3. 35^2 устно

Число оканчивается на 5: умножаем число десятков на следующее за ним ($3 \cdot 4 = 12$) и приписываем 25. Получаем 1225.

Задания

A Вычисление квадрата

Вычислите.

1.1 13^2

1.2 17^2

1.3 $(-8)^2$

1.4 -8^2

1.5 $0{,}3^2$

1.6 $0{,}07^2$

1.7 $1{,}2^2$

1.8 $\left(\frac{3}{5}\right)^2$

1.9 $\left(-\frac{2}{7}\right)^2$

1.10 40^2

1.11 25^2

1.12 $0{,}15^2$

B Смешанные числа и устный счёт

Вычислите.

1.13 $\left(1\frac{1}{2}\right)^2$

1.14 $\left(2\frac{1}{3}\right)^2$

1.15 65^2

1.16 $0{,}25^2$

1.17 $1{,}5^2$

1.18 $(-0{,}4)^2$

C Обратная задача

Найдите все числа, квадрат которых равен данному числу.

1.19 $x^2 = 49$

1.20 $x^2 = 0{,}36$

1.21 $x^2 = 1{,}21$

1.22 $x^2 = \frac{4}{9}$

1.23 $x^2 = 0{,}0016$

1.24 $x^2 = 10000$

1.25 $x^2 = 0$

1.26 $x^2 = -4$

D Квадрат натурального числа?

Может ли число быть квадратом натурального числа? Если да, укажите, квадратом какого.

1.27 1444

1.28 2023

1.29 3249

1.30 7568

1.31 1764

1.32 1445

1.33 5329

2 Арифметический квадратный корень

ЧАСТЬ I · ОСНОВА

44 заданий

ЗАЧЕМ Корень отвечает на вопрос «какое число надо возвести в квадрат, чтобы получить данное?». Так находят сторону квадрата по площади, расстояния по теореме Пифагора, скорость по энергии в физике.

ТЕОРИЯ

> **Определение.** Арифметическим квадратным корнем из числа a называют **неотрицательное** число, квадрат которого равен a. Обозначение: $\sqrt{a}$; число a — подкоренное выражение.

Из определения сразу следуют два факта: $\sqrt{a} \geq 0$ и $(\sqrt{a})^2 = a$. Запись $\sqrt{a}$ имеет смысл только при $a \geq 0$.

- Корень из дроби: $\sqrt{\dfrac{16}{25}} = \dfrac{4}{5}$, потому что $\left(\dfrac{4}{5}\right)^2 = \dfrac{16}{25}$.
- Корень из десятичной дроби: число знаков после запятой делится пополам: $\sqrt{0{,}0049} = 0{,}07$ (4 знака → 2). Если знаков нечётное число, корень нацело не извлекается: $\sqrt{0{,}9} \neq 0{,}3$.
- Проверка ответа всегда одна: возвести ответ в квадрат.

ОТКУДА ПРАВИЛО

Квадрат площадью 49 см² имеет сторону 7 см. Число -7 в квадрате тоже даёт 49, но длина отрицательной не бывает. Чтобы запись $\sqrt{49}$ обозначала ровно одно число, договорились брать неотрицательное: $\sqrt{49} = 7$.

А из отрицательного числа корень не извлекается: квадрат любого числа неотрицателен, поэтому числа, квадрат которого равен -9, нет.

ТИПИЧНЫЕ ОШИБКИ

✗ $\sqrt{49} = \pm 7$	Арифметический корень — одно неотрицательное число: $\sqrt{49} = 7$. Два ответа ± 7 бывают у уравнения $x^2 = 49$.
✗ $\sqrt{0{,}9} = 0{,}3$	Проверка: $0{,}3^2 = 0{,}09$. У числа $0{,}9$ один знак после запятой, корень нацело не извлекается.
✗ $\sqrt{-9} = -3$	Проверка: $(-3)^2 = 9$. Выражение $\sqrt{-9}$ смысла не имеет.
✗ $\sqrt{9+16} = 3+4$	Сначала действие под корнем: $\sqrt{25} = 5$.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЕМ

Пример 1. $\sqrt{0{,}0144}$

$0{,}0144 = \dfrac{144}{10\,000}$, $\sqrt{144} = 12$, $\sqrt{10\,000} = 100$. Ответ $0{,}12$.
Проверка: $0{,}12^2 = 0{,}0144$.

Пример 2. $\sqrt{2\dfrac{7}{9}}$

$2\dfrac{7}{9} = \dfrac{25}{9}$, $\sqrt{\dfrac{25}{9}} = \dfrac{5}{3} = 1\dfrac{2}{3}$.

Пример 3. $3\sqrt{16} - 2\sqrt{25}$

Сначала корни: $3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 = 12 - 10 = 2$.

Задания

A Корень из целого числа

●○○

Вычислите.

2.1 $\sqrt{81}$ 2.2 $\sqrt{144}$ 2.3 $\sqrt{196}$ 2.4 $\sqrt{225}$

2.5 $\sqrt{400}$ 2.6 $\sqrt{10000}$ 2.7 $\sqrt{1}$ 2.8 $\sqrt{0}$

2.9 $\sqrt{361}$ 2.10 $\sqrt{625}$ 2.11 $\sqrt{900}$ 2.12 $\sqrt{1600}$

B Корень из дроби

Вычислите.

2.13 $\sqrt{0{,}25}$ 2.14 $\sqrt{0{,}04}$ 2.15 $\sqrt{1{,}44}$ 2.16 $\sqrt{0{,}0049}$

2.17 $\sqrt{\frac{16}{25}}$ 2.18 $\sqrt{\frac{1}{169}}$ 2.19 $\sqrt{2\frac{1}{4}}$ 2.20 $\sqrt{1\frac{9}{16}}$

2.21 $\sqrt{0{,}0001}$ 2.22 $\sqrt{6{,}25}$ 2.23 $\sqrt{5\frac{4}{9}}$ 2.24 $\sqrt{0{,}0121}$

C Имеет ли смысл выражение

Имеет ли смысл выражение? Если да, найдите его значение.

2.25 $\sqrt{-16}$ 2.26 $-\sqrt{16}$ 2.27 $\sqrt{(-4)^2}$ 2.28 $\sqrt{-0{,}01}$

2.29 $-\sqrt{0{,}01}$ 2.30 $\sqrt{5-9}$ 2.31 $\sqrt{9-5}$

D Вычисления с корнями

Вычислите.

2.32 $\sqrt{0{,}36}+\sqrt{0{,}64}$ 2.33 $0{,}5\sqrt{196}-\frac{1}{3}\sqrt{81}$ 2.34 $(\sqrt{7})^2$

2.35 $2\cdot(-\sqrt{5})^2$ 2.36 $(2\sqrt{3})^2$ 2.37 $\sqrt{0{,}09}\cdot\sqrt{400}$

2.38 $10\sqrt{0{,}01}-\sqrt{0{,}81}$ 2.39 $\sqrt{5^2+12^2}$ 2.40 $\sqrt{10^2-6^2}$

2.41 $\sqrt{\sqrt{81}}$ 2.42 $(\sqrt{13})^2-(\sqrt{3})^2$ 2.43 $-3\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2$

2.44 $\sqrt{9}+\sqrt{16}-\sqrt{9+16}$

ЧАСТЬ I · ОСНОВА

3 Уравнения $x^2 = a$ и $\sqrt{x} = a$

37 заданий

ЗАЧЕМ Это первые уравнения, в которых корень появляется сам собой. Дальше они встретятся внутри квадратных уравнений, в геометрии и физике (по площади найти сторону, по формуле найти время).

ТЕОРИЯ

Уравнение $x^2 = a$	Уравнение $\sqrt{x} = a$
$a > 0$: два корня $x = \pm\sqrt{a}$	$a \geq 0$: один корень $x = a^2$
$a = 0$: один корень $x = 0$	$a < 0$: корней нет
$a < 0$: корней нет	

Если корень не извлекается нацело, ответ оставляют с корнем: $x^2 = 7 \Rightarrow x = \pm\sqrt{7}$.

Уравнение вида $(x - m)^2 = a$ решают так же: сначала $x - m = \pm\sqrt{a}$, затем находят x из двух уравнений.

ОТКУДА ПРАВИЛО

Решим $x^2 = 49$ без «угадывания»: $x^2 - 49 = 0$, по формуле разности квадратов $(x - 7)(x + 7) = 0$. Произведение равно нулю, когда один из множителей равен нулю: $x = 7$ или $x = -7$. Так появляются **два** корня.

Для $\sqrt{x} = a$: по определению корня $x = a^2$, но только если $a \geq 0$ — значение корня отрицательным быть не может.

ТИПИЧНЫЕ ОШИБКИ

✗ $x^2 = 49 \Rightarrow x = 7$	Потерян корень -7: $(-7)^2 = 49$.
✗ $x^2 = -25 \Rightarrow x = \pm 5$	Проверка: $5^2 = 25$. Квадрат не бывает отрицательным — корней нет.
✗ $\sqrt{x} = -2 \Rightarrow x = 4$	Проверка: $\sqrt{4} = 2$. Корней нет.
✗ $(x - 2)^2 = 9 \Rightarrow x - 2 = 3$	Потерян случай $x - 2 = -3$, то есть корень $x = -1$.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЕМ

Пример 1. $3x^2 - 27 = 0$	$3x^2 = 27$, $x^2 = 9$, $x = \pm 3$.
Пример 2. $(2x - 1)^2 = 25$	$2x - 1 = 5$ или $2x - 1 = -5$; $x = 3$ или $x = -2$.
Пример 3. $\sqrt{x - 4} = 3$	$x - 4 = 9$, $x = 13$. Проверка: $\sqrt{13 - 4} = \sqrt{9} = 3$.

Задания

A Уравнение $x^2 = a$

Решите уравнение.

3.1 $x^2 = 64$

3.2 $x^2 = 0{,}49$

3.3 $x^2 = -25$

3.4 $x^2 = 0$

3.5 $x^2 = 11$

3.6 $x^2 = 1\frac{9}{16}$

3.7 $x^2 = 0{,}0009$

3.8 $x^2 = 2{,}25$

B Приведение к виду $x^2 = a$

Решите уравнение.

3.9 $3x^2 = 27$

3.10 $x^2 - 1{,}44 = 0$

3.11 $5x^2 + 20 = 0$

3.12 $4x^2 - 1 = 0$

3.13 $2x^2 = 14$

3.14 $0{,}5x^2 - 8 = 0$

3.15 $7x^2 = 0$

3.16 $9x^2 - 4 = 0$

C Уравнение $(x - m)^2 = a$

Решите уравнение.

3.17 $(x - 2)^2 = 9$

3.18 $(x + 5)^2 = 0$

3.19 $(3x - 1)^2 = 16$

3.20 $(x + 1)^2 = -4$

3.21 $(x - 3)^2 = 0{,}04$

3.22 $(2x + 3)^2 = 49$

3.23 $(5 - x)^2 = 1$

D Уравнение $\sqrt{x} = a$

Решите уравнение.

3.24 $\sqrt{x} = 6$

3.25 $\sqrt{x} = 0{,}3$

3.26 $\sqrt{x} = -2$

3.27 $2\sqrt{x} - 3 = 7$

3.28 $\sqrt{x + 1} = 4$

3.29 $\sqrt{2x + 1} = 5$

3.30 $\sqrt{3x} = \frac{1}{2}$

3.31 $\sqrt{x} + 5 = 2$

E Текстовые задачи

Решите задачу.

3.32 Площадь квадрата равна 196 см². Найдите его сторону.

3.33 Площадь квадратного участка 2,25 га (1 га = 10 000 м²). Найдите длину его стороны в метрах.

3.34 Длина прямоугольника в 4 раза больше ширины, площадь равна 64 см². Найдите стороны.

3.35 Тело падает, проходя за t секунд путь $h = 5t^2$ метров. За сколько секунд оно пролетит 80 м?

3.36 Площадь двух квадратов вместе равна 61 см², сторона первого 5 см. Найдите сторону второго.

3.37 Площадь квадрата увеличили в 25 раз. Во сколько раз увеличилась его сторона?

ЧАСТЬ I · ОСНОВА

4 Иррациональные числа. Оценка и сравнение корней

31 заданий

ЗАЧЕМ Большинство корней ($\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{40}$) нацело не извлекаются. Нужно уметь понять, между какими числами лежит корень, сравнить корни и отметить их на координатной прямой — это отдельное задание ОГЭ.

ТЕОРИЯ

- **Рациональные** числа записываются дробью $\frac{m}{n}$ (m — целое, n — натуральное). **Иррациональные** так не записываются; их десятичная запись бесконечна и непериодична: $\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$
- Если натуральное a не является квадратом натурального числа, то $\sqrt{a}$ — иррациональное число.
- **Оценка.** Ищем соседние квадраты: $36 < 40 < 49$, значит $6 < \sqrt{40} < 7$.
- **Сравнение корней.** При $a, b \geq 0$: если $a < b$, то $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.
- **Сравнение числа с корнем.** Оба числа неотрицательны — сравниваем их квадраты: 5 и $\sqrt{24}$: $25 > 24$, значит $5 > \sqrt{24}$.
- У отрицательных чисел знак сравнения меняется: $\sqrt{20} > 4$, значит $-\sqrt{20} < -4$.

ОТКУДА ПРАВИЛО

Почему $\sqrt{2}$ иррационален. Пусть $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ — несократимая дробь. Тогда $m^2 = 2n^2$, значит m^2 чётно, и m чётно: $m = 2k$. Подставим: $4k^2 = 2n^2$, $n^2 = 2k^2$ — значит и n чётно. Дробь $\frac{m}{n}$ оказалась сократимой на 2. Противоречие.

Почему больший корень у большего числа. Пусть $a < b$, но $\sqrt{a} \geq \sqrt{b}$. Умножим неравенство само на себя (обе части неотрицательны): $a \geq b$. Противоречие.

ТИПИЧНЫЕ ОШИБКИ

✗ $\sqrt{40} \approx 20$	Деление на 2 спутано с извлечением корня: $20^2 = 400$. Верная оценка: $6 < \sqrt{40} < 7$.
✗ $\sqrt{0{,}5} < 0{,}5$	Для чисел от 0 до 1 корень больше самого числа: $\sqrt{0{,}5} \approx 0{,}71$.
✗ $-\sqrt{20} > -4$, «ведь $20 > 16$»	При смене знака у обеих частей знак неравенства меняется: $-\sqrt{20} < -4$.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЕМ

Пример 1. Между какими целыми лежит $\sqrt{75}$?

$64 < 75 < 81$, значит $8 < \sqrt{75} < 9$.

Пример 2. Сравните $0{,}7$ и $\sqrt{0{,}5}$.

$0{,}7^2 = 0{,}49 < 0{,}5$, значит $0{,}7 < \sqrt{0{,}5}$.

Пример 3. Найдите $\sqrt{30}$ с точностью до десятых.

$5{,}4^2 = 29{,}16$, $5{,}5^2 = 30{,}25$, значит $5{,}4 < \sqrt{30} < 5{,}5$. Число 30 ближе к 30,25, поэтому $\sqrt{30} \approx 5{,}5$ (точнее, $5{,}477\ldots$).

Задания

A Оценка корня

Между какими соседними целыми числами лежит число?

4.1 $\sqrt{10}$ 4.2 $\sqrt{50}$ 4.3 $\sqrt{99}$ 4.4 $\sqrt{150}$ 4.5 $\sqrt{300}$

4.6 $\sqrt{1000}$ 4.7 $\sqrt{0{,}5}$ 4.8 $-\sqrt{20}$ 4.9 $\sqrt{8{,}5}$

B Сравнение

Сравните числа.

4.10 $\sqrt{17}$ и 4

4.11 6 и $\sqrt{35}$

4.12 $\sqrt{0{,}8}$ и $0{,}9$

4.13 7 и $\sqrt{50}$

4.14 $-\sqrt{26}$ и -5

4.15 $\sqrt{\dfrac{4}{9}}$ и $0{,}7$

4.16 $\sqrt{2{,}25}$ и $1{,}5$

4.17 $1{,}4$ и $\sqrt{2}$

4.18 -3 и $-\sqrt{8}$

C Упорядочивание

Расположите числа в порядке возрастания.

4.19 $3;\ \sqrt{8};\ \sqrt{10};\ 2{,}9$

4.20 $\sqrt{0{,}5};\ 0{,}5;\ 0{,}8;\ \sqrt{0{,}6}$

4.21 $-\sqrt{7};\ -2{,}5;\ -\sqrt{5};\ -3$

D Подсчёт и рациональность

Ответьте на вопрос.

4.22 Сколько целых чисел лежит между $\sqrt{10}$ и $\sqrt{90}$?

4.23 Сколько целых чисел лежит между $-\sqrt{30}$ и $\sqrt{15}$?

4.24 Сколько натуральных n удовлетворяют условию $\sqrt{n} < 5$?

4.25 Найдите наибольшее целое число, меньшее $\sqrt{200}$.

4.26 Какие из чисел рациональны: $\sqrt{0{,}04}$, $\sqrt{0{,}4}$, $\sqrt{\dfrac{9}{16}}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{1{,}21}$, $\sqrt{\dfrac{2}{8}}$?

4.27 Сколько существует натуральных $n \le 200$, для которых $\sqrt{n}$ — натуральное число?

E Приближённые значения и координатная прямая

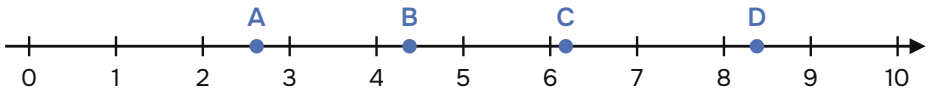
Без калькулятора.

4.28 Найдите $\sqrt{20}$ с точностью до десятых.

4.29 Найдите $\sqrt{55}$ с точностью до десятых.

4.30 Найдите $\sqrt{8}$ с точностью до десятых.

4.31 На прямой отмечены точки A, B, C, D (рисунок ниже). Какая точка соответствует каждому из чисел $\sqrt{19}$, $\sqrt{70}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{38}$?



5 ЧАСТЬ I · ОСНОВА
Функция $y = \sqrt{x}$ и её график

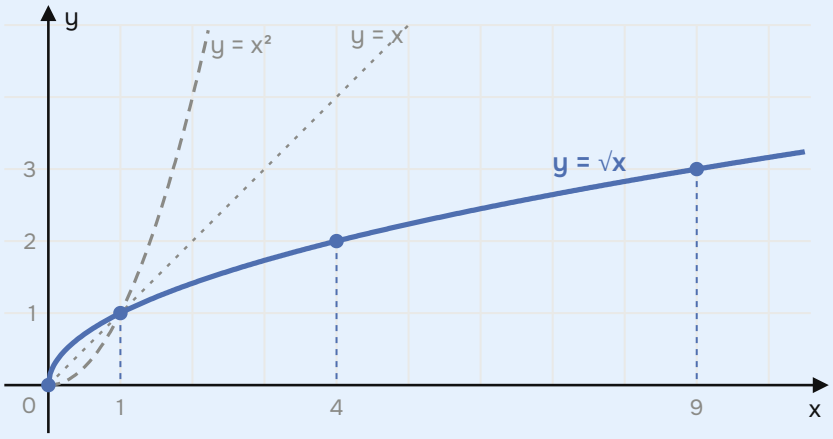
31 заданий

ЗАЧЕМ График показывает сразу все свойства корня: где он существует, какие значения принимает, как растёт. Задания на график и область определения встречаются в ОГЭ и в 9–11 классах.

ТЕОРИЯ

x	0	0,25	1	4	9	16
y	0	0,5	1	2	3	4

- Область определения: $x \geq 0$.
- Значения: $y \geq 0$; график выходит из точки $(0; 0)$.
- Функция возрастает: большему x соответствует больший y.
- Растёт всё медленнее: чтобы y вырос с 2 до 3, x должен вырасти с 4 до 9.
- Наибольшее и наименьшее значения на отрезке $[a; b]$ – это $\sqrt{b}$ и $\sqrt{a}$.



ОТКУДА ПРАВИЛО

График $y = \sqrt{x}$ симметричен ветви параболы $y = x^2$ $(x \geq 0)$ относительно прямой $y = x$. Причина: если точка $(a; b)$ лежит на параболе $(b = a^2, a \geq 0)$, то $\sqrt{b} = a$ – точка $(b; a)$ лежит на графике корня. Координаты просто меняются местами.

Область определения выражения $\sqrt{f(x)}$ находится из условия $f(x) \geq 0$.

ТИПИЧНЫЕ ОШИБКИ

✗ $(16; -4)$ лежит на графике	Значения $y = \sqrt{x}$ неотрицательны: $\sqrt{16} = 4$.
✗ $y = \sqrt{x - 3}$ определена при $x \geq -3$	Условие $x - 3 \geq 0$ даёт $x \geq 3$.
✗ На $[1; 9]$ наибольшее значение равно 9	Нужно значение функции: $\sqrt{9} = 3$.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЕМ

Пример 1. Принадлежит ли графику точка $A(2{,}25;\ 1{,}5)$?

$\sqrt{2{,}25} = 1{,}5$ – да.

Пример 2. Область определения $y = \sqrt{6 - 2x}$.

$6 - 2x \geq 0$, $x \leq 3$.

Пример 3. Наименьшее и наибольшее значения $y = \sqrt{x}$ на $[0{,}04;\ 16]$.

Функция возрастает: $\sqrt{0{,}04} = 0{,}2$ и $\sqrt{16} = 4$.

Задания

A Точки на графике

Принадлежит ли точка графику $y = \sqrt{x}$?

5.1 $(49;\ 7)$

5.2 $(0{,}25;\ 0{,}5)$

5.3 $(16;\ -4)$

5.4 $(-9;\ 3)$

5.5 $(0{,}04;\ 0{,}02)$

5.6 $(1{,}69;\ 1{,}3)$

5.7 $\left(\frac{1}{9};\ \frac{1}{3}\right)$

5.8 $(100;\ 50)$

B Значение функции и аргумента

Для функции $y = \sqrt{x}$ найдите:

5.9 y при $x = 0{,}81$

5.10 y при $x = 1{,}96$

5.11 y при $x = 2\frac{7}{9}$

5.12 x, если $y = 12$

5.13 x, если $y = 0{,}3$

5.14 x, если $y = -1$

C Область определения

Найдите область определения функции.

5.15 $y = \sqrt{x - 3}$

5.16 $y = \sqrt{5 - x}$

5.17 $y = \sqrt{2x + 8}$

5.18 $y = \sqrt{-x}$

5.19 $y = \sqrt{x^2 + 1}$

5.20 $y = \sqrt{-x^2}$

5.21 $y = \sqrt{x} + \sqrt{4 - x}$

5.22 $y = \sqrt{3x - 1}$

D Наибольшее и наименьшее значения

Найдите наименьшее и наибольшее значения $y = \sqrt{x}$ на отрезке.

5.23 $[4;\ 25]$

5.24 $[0{,}09;\ 1]$

5.25 $[0;\ 0{,}64]$

5.26 $\left[\frac{1}{4};\ 6{,}25\right]$

E Пересечение графиков

Решите задачу.

5.27 Найдите координаты точек пересечения графиков $y = \sqrt{x}$ и $y = x$.

5.28 Найдите координаты точки пересечения графиков $y = \sqrt{x}$ и $y = 3$.

5.29 Найдите координаты точки пересечения графиков $y = \sqrt{x}$ и $y = x - 2$.

5.30 При каком a график $y = \sqrt{x}$ проходит через точку $(a;\ 7)$?

5.31 При каком a график $y = \sqrt{x}$ проходит через точку $(25;\ a)$?

ЧАСТЬ II · СВОЙСТВА КОРНЯ

6 Корень из произведения и из частного

37 заданий

ЗАЧЕМ Эти два правила — главный инструмент темы. Они позволяют считать корни из больших чисел без таблиц, упрощать выражения и решать задания ОГЭ на значение выражения.

ТЕОРИЯ

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \text{ при } a \geq 0,\ b \geq 0 \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \text{ при } a \geq 0,\ b > 0$$

Правила читаются в обе стороны:

- слева направо — корень из большого произведения распадается на простые корни: $\sqrt{0{,}09\cdot 64} = 0{,}3\cdot 8$;
- справа налево — неудобные корни собираются в один удобный: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{32} = \sqrt{64} = 8$.

Для больших чисел полезно разложение на простые множители: $\sqrt{1764} = \sqrt{2^2\cdot 3^2\cdot 7^2} = 2\cdot 3\cdot 7 = 42$.

ОТКУДА ПРАВИЛО

Проверим, что $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ подходит под определение корня из ab:

1) оно неотрицательно (произведение неотрицательных чисел); 2) его квадрат: $(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2\cdot(\sqrt{b})^2 = ab$.

Значит, $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ и есть $\sqrt{ab}$. Для частного рассуждение такое же: $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{a}{b}$.

ТИПИЧНЫЕ ОШИБКИ

✗ $\sqrt{9+16} = \sqrt{9}+\sqrt{16}$	Для суммы такого правила нет: $\sqrt{25} = 5$, а $3+4 = 7$.
✗ $\sqrt{(-4)(-9)} = \sqrt{-4}\cdot\sqrt{-9}$	Правило работает только для неотрицательных множителей. Сначала умножаем: $\sqrt{36} = 6$.
✗ $\sqrt{2\frac{1}{4}} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{4}}$	Смешанное число — это сумма $2+\frac{1}{4}$. Переводим: $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЕМ

Пример 1. $\sqrt{0{,}09\cdot 64}$

$\sqrt{0{,}09}\cdot\sqrt{64} = 0{,}3\cdot 8 = 2{,}4$.

Пример 2. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}$

$\sqrt{2\cdot 32} = \sqrt{64} = 8$.

Пример 3. $\sqrt{17^2-8^2}$

Разность квадратов: $\sqrt{(17-8)(17+8)} = \sqrt{9\cdot 25} = 3\cdot 5 = 15$.

Пример 4. $\frac{\sqrt{150}}{\sqrt{6}}$

$\sqrt{\frac{150}{6}} = \sqrt{25} = 5$.

Задания

A Корень из произведения

Вычислите.

6.1 $\sqrt{16\cdot 25}$

6.2 $\sqrt{0{,}04\cdot 81}$

6.3 $\sqrt{36\cdot 0{,}49\cdot 100}$

6.4 $\sqrt{144\cdot 0{,}25}$

6.5 $\sqrt{2^4 \cdot 5^2}$ 6.6 $\sqrt{0{,}01 \cdot 169}$ 6.7 $\sqrt{49 \cdot 0{,}16 \cdot 4}$

B Произведение корней

Вычислите.

6.8 $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ 6.9 $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$ 6.10 $\sqrt{0{,}2} \cdot \sqrt{20}$

6.11 $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$ 6.12 $\sqrt{18} \cdot \sqrt{50}$ 6.13 $\sqrt{45} \cdot \sqrt{80}$

6.14 $\sqrt{2{,}5} \cdot \sqrt{1{,}6}$ 6.15 $\sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{2}$ 6.16 $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3}{8}}$

C Корень из частного

Вычислите.

6.17 $\sqrt{\frac{49}{121}}$ 6.18 $\sqrt{2\frac{14}{25}}$ 6.19 $\sqrt{\frac{0{,}81}{0{,}04}}$

6.20 $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$ 6.21 $\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$ 6.22 $\frac{\sqrt{1{,}8}}{\sqrt{0{,}2}}$

6.23 $\sqrt{\frac{0{,}25}{9}}$ 6.24 $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$ 6.25 $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{45}}$

D Разность квадратов под корнем

Вычислите.

6.26 $\sqrt{65^2 - 63^2}$ 6.27 $\sqrt{85^2 - 84^2}$ 6.28 $\sqrt{122^2 - 22^2}$

6.29 $\sqrt{313^2 - 312^2}$ 6.30 $\sqrt{10^2 - 8^2}$ 6.31 $\sqrt{6{,}8^2 - 3{,}2^2}$

E Через разложение на множители

Вычислите.

6.32 $\sqrt{1764}$ 6.33 $\sqrt{5184}$ 6.34 $\sqrt{11025}$

6.35 $\sqrt{2^6 \cdot 3^4}$ 6.36 $\sqrt{3^4 \cdot 7^2}$ 6.37 $\sqrt{5^4 \cdot 2^2}$

ЧАСТЬ II · СВОЙСТВА КОРНЯ

7 Корень из квадрата: $\sqrt{a^2} = |a|$

27 заданий

ЗАЧЕМ Самое коварное правило темы. Без него ошибаются в упрощении выражений с буквами, в задачах ОГЭ «найдите значение при $a = \ldots$» и позже — в иррациональных уравнениях.

ТЕОРИЯ

$$\sqrt{a^2} = |a| \text{ при любом } a \qquad |a| = a \text{ при } a \geq 0, \quad |a| = -a \text{ при } a < 0$$

- Если знак a известен, модуль раскрываем сразу: при $x < 0$ $\sqrt{x^2} = -x$ (это положительное число!).
- Чётные степени: $\sqrt{a^4} = a^2$ (модуль не нужен, $a^2 \geq 0$), $\sqrt{a^6} = |a^3|$.
- Числа с корнями: $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = |1-\sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$, потому что $1 < \sqrt{2}$.
- Полный квадрат под корнем: $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = \sqrt{(x-3)^2} = |x-3|$.

ОТКУДА ПРАВИЛО

Подставим $a = -5$: $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$. Ответ равен $-a$, а при $a = 5$ он равен a. Общая запись для обоих случаев — модуль.

Строго: $|a| \geq 0$ и $|a|^2 = a^2$, поэтому по определению $|a|$ — арифметический корень из a^2.

ТИПИЧНЫЕ ОШИБКИ

✗ $\sqrt{(-7)^2} = -7$	Корень неотрицателен: $\sqrt{49} = 7$.
✗ $\sqrt{x^2} = x$ при $x < 0$	При отрицательном x ответ $-x$ — он положителен.
✗ $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = 1 - \sqrt{2}$	Число $1 - \sqrt{2}$ отрицательно. Верно: $\sqrt{2} - 1$.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЕМ

Пример 1. $\sqrt{16a^2}$ при $a < 0$ — $\sqrt{16a^2} = 4|a| = -4a$.

Пример 2. $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$ — $\sqrt{5} > 2$, поэтому $|2-\sqrt{5}| = \sqrt{5} - 2$.

Пример 3. $\sqrt{x^2 - 6x + 9}$ при $x < 3$ — $\sqrt{(x-3)^2} = |x-3| = 3 - x$.

Задания

A Числа

Вычислите.

7.1 $\sqrt{(-12)^2}$ 7.2 $\sqrt{0{,}3^2}$ 7.3 $-\sqrt{(-4)^2}$ 7.4 $\sqrt{3^4}$

7.5 $\sqrt{2^6}$ 7.6 $\sqrt{(-2)^6}$ 7.7 $\sqrt{5^8}$ 7.8 $\sqrt{(-0{,}1)^4}$

B Буквы с условием

Упростите выражение.

7.9 $\sqrt{x^2}$ при $x < 0$ 7.10 $\sqrt{4a^2}$ при $a \geq 0$ 7.11 $\sqrt{9y^2}$ при $y < 0$

7.12 $\sqrt{a^4}$ 7.13 $\sqrt{x^6}$ при $x < 0$ 7.14 $\sqrt{16a^8b^2}$ при $b < 0$

7.15 $0{,}5\sqrt{36c^2}$ при $c > 0$ 7.16 $-\sqrt{25m^2}$ при $m < 0$ 7.17 $\sqrt{0{,}49p^{10}}$ при $p < 0$

C Числа с корнями

Вычислите.

7.18 $\sqrt{(3-\sqrt{7})^2}$

7.19 $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}+\sqrt{3}$

7.20 $\sqrt{(4-\sqrt{15})^2}+\sqrt{15}$

7.21 $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$

7.22 $\sqrt{(\sqrt{6}-3)^2}+\sqrt{(\sqrt{6}-2)^2}$

D Полный квадрат под корнем

Упростите выражение.

7.23 $\sqrt{x^2-10x+25}$ при $x \geq 5$

7.24 $\sqrt{a^2+2a+1}+a$ при $a < -1$

7.25 $\sqrt{4x^2-4x+1}$ при $x < 0{,}5$

7.26 $\sqrt{y^2+6y+9}-\sqrt{y^2}$ при $y > 0$

7.27 $\sqrt{x^2-8x+16}+\sqrt{x^2}$ при $0 < x < 4$

ЧАСТЬ II · СВОЙСТВА КОРНЯ

8 Вынесение множителя из-под знака корня

34 заданий

ЗАЧЕМ Ответ с корнем принято записывать в простейшем виде: $5\sqrt{2}$ вместо $\sqrt{50}$. Без этого не сложить корни, не сравнить ответ с ключом и не увидеть подобные слагаемые.

ТЕОРИЯ

$$\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b} \text{ при } a \geq 0,\ b \geq 0$$

Алгоритм. 1) Представить подкоренное число произведением **наибольшего** квадрата на оставшийся множитель. 2) Корень из квадрата вынести за знак корня.

Квадраты, которые полезно видеть сразу: 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225.

Если наибольший квадрат не виден, раскладываем на простые множители и выносим пары: $\sqrt{1008} = \sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 7} = 2^2 \cdot 3\sqrt{7} = 12\sqrt{7}$.

ОТКУДА ПРАВИЛО

Это правило корня из произведения: $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.

Почему нужен **наибольший** квадрат: $\sqrt{48} = \sqrt{4 \cdot 12} = 2\sqrt{12}$ — под корнем снова есть квадрат, ведь $12 = 4 \cdot 3$. Придётся выносить ещё раз: $2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$. С квадратом 16 получается сразу: $\sqrt{16 \cdot 3} = 4\sqrt{3}$.

ТИПИЧНЫЕ ОШИБКИ

✗ $\sqrt{50} = 25\sqrt{2}$	Выносится корень из 25: $5\sqrt{2}$.
✗ $\sqrt{48} = 2\sqrt{12}$	Вынесено не до конца: $2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$.
✗ $\sqrt{9+2} = 3 + \sqrt{2}$	Выносить можно только множитель; $\sqrt{11}$ не упрощается.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЕМ

Пример 1. $\sqrt{72}$	$\sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}$.
Пример 2. $0{,}1\sqrt{500}$	$0{,}1 \cdot \sqrt{100 \cdot 5} = 0{,}1 \cdot 10\sqrt{5} = \sqrt{5}$.
Пример 3. $\sqrt{a^5},\ a \geq 0$	$\sqrt{a^4 \cdot a} = a^2\sqrt{a}$.

Задания

A Основные случаи

Вынесите множитель из-под знака корня.

8.1 $\sqrt{8}$	8.2 $\sqrt{12}$	8.3 $\sqrt{18}$	8.4 $\sqrt{20}$	8.5 $\sqrt{27}$
8.6 $\sqrt{32}$	8.7 $\sqrt{45}$	8.8 $\sqrt{48}$	8.9 $\sqrt{75}$	8.10 $\sqrt{98}$
8.11 $\sqrt{200}$	8.12 $\sqrt{300}$	8.13 $\sqrt{28}$	8.14 $\sqrt{125}$	

B С коэффициентом и дроби

Упростите.

8.15 $2\sqrt{18}$	8.16 $\frac{1}{2}\sqrt{28}$	8.17 $0{,}2\sqrt{75}$	8.18 $\sqrt{\frac{3}{4}}$
8.19 $\sqrt{\frac{8}{9}}$	8.20 $\sqrt{0{,}08}$	8.21 $\sqrt{0{,}12}$	8.22 $-3\sqrt{\frac{2}{9}}$

C С переменными

Вынесите множитель из-под знака корня ($a \geq 0, b \geq 0$).

8.23 $\sqrt{9a}$

8.24 $\sqrt{a^3}$

8.25 $\sqrt{8a^2b}$

8.26 $\sqrt{50a^5}$

8.27 $\sqrt{a^7b^4}$

8.28 $\sqrt{12ab^2}$

D Большие и дробные числа

Вынесите множитель из-под знака корня.

8.29 $\sqrt{1200}$

8.30 $\sqrt{0{,}0072}$

8.31 $\sqrt{675}$

8.32 $\sqrt{1008}$

8.33 $\sqrt{2^5 \cdot 3^3}$

8.34 $\sqrt{162}$

ЧАСТЬ II · СВОЙСТВА КОРНЯ

9 Внесение множителя под знак корня. Сравнение

22 заданий

ЗАЧЕМ Обратное действие нужно, чтобы сравнивать числа вида $3\sqrt{5}$ и $2\sqrt{11}$ без калькулятора и упрощать выражения, где множитель удобнее спрятать под корень.

ТЕОРИЯ

$$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b} \text{ при } a \geq 0 \qquad -a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2 b} \text{ при } a \geq 0$$

- Под корень вносится только неотрицательный множитель; минус остаётся перед корнем.
- **Сравнение.** Вносим множители под корень и сравниваем подкоренные числа: $3\sqrt{5} = \sqrt{45}$, $2\sqrt{11} = \sqrt{44}$, значит $3\sqrt{5} > 2\sqrt{11}$.
- Для отрицательных чисел знак сравнения меняется: $-5\sqrt{2} = -\sqrt{50} < -\sqrt{48} = -4\sqrt{3}$.

ОТКУДА ПРАВИЛО

Это правило вынесения множителя, прочитанное справа налево: $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$. Множитель a уходит под корень **в квадрате**: $3\sqrt{2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{18}$.

ТИПИЧНЫЕ ОШИБКИ

✗ $3\sqrt{2} = \sqrt{3 \cdot 2}$	Множитель вносится в квадрате: $\sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{18}$.
✗ $-2\sqrt{5} = \sqrt{(-2)^2 \cdot 5} = \sqrt{20}$	Левая часть отрицательна, правая положительна. Верно: $-2\sqrt{5} = -\sqrt{20}$.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЕМ

Пример 1. $0{,}2\sqrt{50}$ — $\sqrt{0{,}04 \cdot 50} = \sqrt{2}$.

Пример 2. Сравните $4\sqrt{3}$ и $3\sqrt{5}$. — $\sqrt{48}$ и $\sqrt{45}$: $48 > 45$, значит $4\sqrt{3} > 3\sqrt{5}$.

Пример 3. $a\sqrt{a}$, $a \geq 0$ — $\sqrt{a^2 \cdot a} = \sqrt{a^3}$.

Задания

A Внесение множителя

Внесите множитель под знак корня.

9.1 $3\sqrt{2}$ 9.2 $5\sqrt{3}$ 9.3 $2\sqrt{7}$ 9.4 $\frac{1}{3}\sqrt{27}$

9.5 $-2\sqrt{5}$ 9.6 $10\sqrt{0{,}03}$ 9.7 $\frac{2}{5}\sqrt{50}$ 9.8 $0{,}5\sqrt{12}$

B Сравнение

Сравните числа.

9.9 $3\sqrt{5}$ и $2\sqrt{11}$ 9.10 $2\sqrt{6}$ и $3\sqrt{3}$ 9.11 $7\sqrt{2}$ и $4\sqrt{6}$ 9.12 $\frac{1}{2}\sqrt{20}$ и $\frac{1}{3}\sqrt{45}$

9.13 $-5\sqrt{2}$ и $-4\sqrt{3}$ 9.14 $6\sqrt{0{,}5}$ и $0{,}5\sqrt{70}$ 9.15 $2\sqrt{13}$ и $3\sqrt{6}$ 9.16 $\frac{2}{3}\sqrt{18}$ и $\frac{3}{4}\sqrt{8}$

C Упорядочивание

Расположите числа в порядке возрастания.

9.17 $2\sqrt{6}$; $3\sqrt{3}$; $\sqrt{26}$; 5 9.18 $4\sqrt{2}$; $3\sqrt{3}$; $2\sqrt{7}$; 5 9.19 $-2\sqrt{3}$; $-3\sqrt{2}$; -4

D С переменными

Внесите множитель под знак корня.

9.20 $b\sqrt{3}$ при $b \geq 0$

9.21 $-c\sqrt{2}$ при $c \geq 0$

9.22 $x\sqrt{\dfrac{5}{x}}$ при $x > 0$

ЧАСТЬ III · ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

10 Подобные радикалы: сложение и вычитание

24 заданий

ЗАЧЕМ Сложение корней — частая операция в заданиях на упрощение. Складывать можно только одинаковые корни, а одинаковыми они часто становятся лишь после вынесения множителя.

ТЕОРИЯ

Слагаемые с одинаковым корнем называют **подобными**: $3\sqrt{2}$ и $5\sqrt{2}$. Их складывают как подобные слагаемые: $3\sqrt{2}+5\sqrt{2}=8\sqrt{2}$.

Разные корни ($\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$) в одно слагаемое не объединяются: сумма $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ так и остаётся.

Алгоритм. 1) Вынести множитель из-под каждого корня. 2) Найти одинаковые корни. 3) Сложить их коэффициенты.

ОТКУДА ПРАВИЛО

Это распределительный закон: $3\sqrt{2}+5\sqrt{2}=(3+5)\sqrt{2}=8\sqrt{2}$ – так же, как $3x+5x=8x$, если обозначить $x=\sqrt{2}$.

Почему $\sqrt{2}+\sqrt{3}\neq\sqrt{5}$: $1{,}41+1{,}73\approx3{,}15$, а $\sqrt{5}\approx2{,}24$.

ТИПИЧНЫЕ ОШИБКИ

✗ $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$	Корни складываются только как подобные слагаемые; сумма разных корней не упрощается.
✗ $4\sqrt{3}-\sqrt{3}=4$	Перед $\sqrt{3}$ стоит коэффициент 1: $4\sqrt{3}-1\sqrt{3}=3\sqrt{3}$.
✗ $\sqrt{8}+\sqrt{2}=\sqrt{10}$	Сначала вынесение: $2\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЕМ

Пример 1. $\sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{75}$

$2\sqrt{3}+3\sqrt{3}-5\sqrt{3}=0.$

Пример 2. $3\sqrt{28}-2\sqrt{63}+\sqrt{7}$

$6\sqrt{7}-6\sqrt{7}+\sqrt{7}=\sqrt{7}.$

Пример 3. $\sqrt{4a}+\sqrt{9a}-\sqrt{25a}$

$2\sqrt{a}+3\sqrt{a}-5\sqrt{a}=0.$

Задания

A Подобные слагаемые

Упростите.

10.1 $4\sqrt{3}+7\sqrt{3}$

10.2 $9\sqrt{5}-12\sqrt{5}$

10.3 $\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}$

10.4 $0{,}5\sqrt{7}-1{,}5\sqrt{7}+3\sqrt{7}$

10.5 $6\sqrt{11}-\sqrt{11}$

10.6 $\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{3}\sqrt{3}$

B После вынесения множителя

Упростите.

10.7 $\sqrt{8}+\sqrt{18}$

10.8 $\sqrt{50}-\sqrt{32}$

10.9 $\sqrt{20}+\sqrt{45}-\sqrt{5}$

10.10 $\sqrt{200}-2\sqrt{50}+\sqrt{8}$

10.11 $\sqrt{48}-\sqrt{27}$

10.12 $2\sqrt{75}-3\sqrt{12}$

10.13 $\sqrt{72}+\sqrt{18}-\sqrt{98}$

10.14 $5\sqrt{8}-3\sqrt{18}+\sqrt{32}$

10.15 $\sqrt{45}-\sqrt{80}+\sqrt{125}$

10.16 $\sqrt{300}-\sqrt{108}+\sqrt{12}$

C С дробными коэффициентами

Упростите.

10.17 $0{,}5\sqrt{48} - \frac{1}{3}\sqrt{27} + \sqrt{3}$

10.18 $0{,}2\sqrt{50} + 0{,}3\sqrt{200}$

10.19 $\frac{2}{3}\sqrt{18} - \frac{1}{2}\sqrt{8}$

10.20 $3\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{12}$

D С переменными

Упростите ($a \geq 0, x \geq 0$).

10.21 $\sqrt{16a} + \sqrt{9a}$

10.22 $2\sqrt{x^3} + x\sqrt{16x}$

10.23 $\sqrt{a^3} - a\sqrt{a} + \sqrt{4a^3}$

10.24 $\sqrt{49x} - \sqrt{x} - 3\sqrt{4x}$

ЧАСТЬ III · ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

11 Умножение выражений с корнями. Формулы сокращённого умножения

24 заданий

ЗАЧЕМ Скобки с корнями раскрывают по обычным правилам алгебры. Формулы сокращённого умножения дают «чудо»: из выражения с корнями получается целое число — на этом построено много заданий ОГЭ.

ТЕОРИЯ

Раскрываем скобки как обычно и пользуемся двумя фактами: $(\sqrt{a})^2 = a$ и $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \qquad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

- $(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2) = 5 - 4 = 1$ — корни исчезают.
- $(\sqrt{3}+1)^2 = 3 + 2\sqrt{3} + 1 = 4 + 2\sqrt{3}$ — средний член содержит корень.
- $(2\sqrt{3})^2 = 2^2 \cdot (\sqrt{3})^2 = 4 \cdot 3 = 12$.

ОТКУДА ПРАВИЛО

Разность квадратов для корней: $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$ — в ответе нет корней. Поэтому множители вида $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ и $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ называют **сопряжёнными**; они понадобятся в разделе 12.

ТИПИЧНЫЕ ОШИБКИ

✗ $(\sqrt{3}+1)^2 = 3 + 1$	Потерян удвоенный член: $3 + 2\sqrt{3} + 1 = 4 + 2\sqrt{3}$.
✗ $(2\sqrt{3})^2 = 6$	В квадрат возводится каждый множитель: $4 \cdot 3 = 12$.
✗ $\sqrt{2}(\sqrt{2}+3) = 2 + 3$	Второе слагаемое тоже умножается на $\sqrt{2}$: $2 + 3\sqrt{2}$.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЕМ

Пример 1. $\sqrt{2}(\sqrt{8}+\sqrt{18})$ — $\sqrt{16}+\sqrt{36} = 4 + 6 = 10$.

Пример 2. $(2\sqrt{3}-1)(2\sqrt{3}+1)$ — $(2\sqrt{3})^2 - 1^2 = 12 - 1 = 11$.

Пример 3. $(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2 - \sqrt{48}$ — $6 + 2\sqrt{12} + 2 - 4\sqrt{3} = 8 + 4\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 8$.

Задания

A Раскрытие скобок

Выполните действия.

11.1 $\sqrt{3}(\sqrt{12}-\sqrt{3})$

11.2 $(\sqrt{5}+\sqrt{20})\sqrt{5}$

11.3 $2\sqrt{6}(\sqrt{6}-\sqrt{24})$

11.4 $\sqrt{2}(\sqrt{2}+3)$

11.5 $(\sqrt{7}-2)\sqrt{7}$

11.6 $\sqrt{10}(\sqrt{40}+\sqrt{10})$

B Разность квадратов

Выполните действия.

11.7 $(\sqrt{11}-3)(\sqrt{11}+3)$

11.8 $(\sqrt{15}+\sqrt{14})(\sqrt{15}-\sqrt{14})$

11.9 $(5-2\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})$

11.10 $(\sqrt{13}-\sqrt{7})(\sqrt{13}+\sqrt{7})$

11.11 $(3\sqrt{2}-2)(3\sqrt{2}+2)$

11.12 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ при $a, b \geq 0$

C Квадрат суммы и разности

Выполните действия.

11.13 $(\sqrt{2}+1)^2$

11.14 $(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2$

11.15 $(2-\sqrt{3})^2$

11.16 $(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2-\sqrt{84}$

11.17 $(3+\sqrt{2})^2-6\sqrt{2}$

11.18 $(\sqrt{6}-\sqrt{5})^2+\sqrt{120}$

D Значение выражения

Найдите значение выражения.

11.19 $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-\sqrt{24}$

11.20 $(\sqrt{45}-\sqrt{5})\sqrt{5}$

11.21 $(\sqrt{18}-\sqrt{8})^2$

11.22 $\dfrac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)^2}{9+\sqrt{72}}$

11.23 $(\sqrt{7}-1)(\sqrt{7}+1)\cdot\sqrt{0{,}25}$

11.24 $\dfrac{\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{10}+\sqrt{2}\right)}{4}$

12 Освобождение от иррациональности в знаменателе

ЧАСТЬ III · ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

17 заданий

ЗАЧЕМ Дробь с корнем в знаменателе неудобна: её трудно оценить и сложить с другими. Стандартная запись ответа — без корня в знаменателе, и этот приём нужен для сокращения и сравнения выражений.

ТЕОРИЯ

Знаменатель	Умножаем числитель и знаменатель на	Пример
$\sqrt{b}$	$\sqrt{b}$	$\frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$
$\sqrt{a}+b$	$\sqrt{a}-b$ (сопряжённое)	$\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2}-1$
$\sqrt{a}-\sqrt{b}$	$\sqrt{a}+\sqrt{b}$	$\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{7-6}$

ОТКУДА ПРАВИЛО

Значение дроби не меняется, если числитель и знаменатель умножить на одно и то же ненулевое число (основное свойство дроби). Выбираем множитель так, чтобы корень в знаменателе исчез: $\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}=b$, а $(\sqrt{a}+b)(\sqrt{a}-b)=a-b^2$ по формуле разности квадратов.

ТИПИЧНЫЕ ОШИБКИ

✗ $\frac{6}{\sqrt{3}}=2$	В знаменателе стоит $\sqrt{3}$; домножаем на $\sqrt{3}$: $\frac{6\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$.
✗ $\frac{1}{\sqrt{2}+1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}$	Получится $(\sqrt{2}+1)^2$ — корень останется. Нужно сопряжённое $\sqrt{2}-1$.
✗ $\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{3+1}$	В знаменателе разность квадратов: $3-1=2$. Ответ $\sqrt{3}-1$.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЕМ

Пример 1. $\frac{10}{\sqrt{5}}$

$$\frac{10\sqrt{5}}{5}=2\sqrt{5}.$$

Пример 2. $\frac{6}{3-\sqrt{3}}$

$$\frac{6(3+\sqrt{3})}{9-3}=3+\sqrt{3}.$$

Пример 3. $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}$

$$(\sqrt{2}+1)-(\sqrt{2}-1)=2.$$

Задания

A Знаменатель $\sqrt{b}$

Освободитесь от иррациональности в знаменателе.

12.1 $\frac{6}{\sqrt{3}}$ 12.2 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 12.3 $\frac{15}{2\sqrt{5}}$ 12.4 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$

12.5 $\frac{4}{\sqrt{8}}$ 12.6 $\frac{14}{\sqrt{7}}$ 12.7 $\frac{3}{\sqrt{12}}$

B Сопряжённое выражение

Освободитесь от иррациональности в знаменателе.

12.8 $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$

12.9 $\dfrac{4}{\sqrt{5}-1}$

12.10 $\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$

12.11 $\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$

12.12 $\dfrac{3}{\sqrt{10}-\sqrt{7}}$

12.13 $\dfrac{11}{2\sqrt{3}+1}$

C Вычисления

Найдите значение выражения.

12.14 $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}+\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$

12.15 $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$

12.16 $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}-\sqrt{5}$

12.17 $\dfrac{6}{\sqrt{3}}-\sqrt{12}$

13 ЧАСТЬ III · ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
Сокращение дробей с корнями

13 заданий

ЗАЧЕМ Это обобщение всей темы: нужно увидеть в числителе или знаменателе разность квадратов, полный квадрат или общий множитель. Такие преобразования встречаются в задании ОГЭ на упрощение выражений и в 9–11 классах.

ТЕОРИЯ

Главная идея: любое неотрицательное число — квадрат своего корня: $a = (\sqrt{a})^2$. Отсюда разложения:

- $a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$; $x - 9 = (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)$;
- $a + \sqrt{a} = \sqrt{a}(\sqrt{a} + 1)$; $7 + \sqrt{7} = \sqrt{7}(\sqrt{7} + 1)$;
- $x + 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x} + 1)^2$; $y - 6\sqrt{y} + 9 = (\sqrt{y} - 3)^2$.

После разложения сокращаем одинаковые множители.

ОТКУДА ПРАВИЛО

$x - 9 = (\sqrt{x})^2 - 3^2 = (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)$ при $x \geq 0$ — обычная формула разности квадратов, где роль a играет $\sqrt{x}$.

ТИПИЧНЫЕ ОШИБКИ

✗ $\dfrac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = x + 1$

Сокращать можно множители, слагаемое x не сокращается. Верно: $\dfrac{\sqrt{x}\,(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + 1$.

✗ $\dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \dfrac{1}{x + 2}$

Разложение $x - 4 = (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)$, поэтому $\dfrac{1}{\sqrt{x} + 2}$.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЕМ

Пример 1. $\dfrac{a - 9}{\sqrt{a} + 3}$

$$\frac{(\sqrt{a} - 3)\,(\sqrt{a} + 3)}{\sqrt{a} + 3} = \sqrt{a} - 3.$$

Пример 2. $\dfrac{7 + \sqrt{7}}{\sqrt{7}}$

$$\frac{\sqrt{7}\,(\sqrt{7} + 1)}{\sqrt{7}} = \sqrt{7} + 1.$$

Пример 3. $\dfrac{x + 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1}$

$$\frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{\sqrt{x} + 1} = \sqrt{x} + 1.$$

Задания

A Числовые дроби ●●○

Сократите дробь.

13.1 $\dfrac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} - 1}$

13.2 $\dfrac{5 - \sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

13.3 $\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

13.4 $\dfrac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}$

13.5 $\dfrac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$

B Дроби с переменными ●●●

Сократите дробь (все переменные положительны, знаменатель не равен нулю).

13.6 $\dfrac{a - 16}{\sqrt{a} - 4}$

13.7 $\dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

13.8 $\dfrac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

13.9 $\dfrac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$

13.10 $\dfrac{y-6\sqrt{y}+9}{\sqrt{y}-3}$

13.11 $\dfrac{3\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}}$

13.12 $\dfrac{m-n}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}$

13.13 $\dfrac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

14 ЧАСТЬ IV · ОГЭ И ВЫШЕ

Задания в формате ОГЭ

16 заданий

ЗАЧЕМ Здесь собраны задания в том виде, в каком корни встречаются на ОГЭ: число на координатной прямой, значение выражения, выбор рационального или наибольшего числа. Ответ в бланк — целое число или конечная десятичная дробь, номер варианта.

ТЕОРИЯ

Стратегия для заданий на значение выражения.

1. Собрать всё под один корень (произведение и частное корней) или разложить на простые множители.
2. Искать формулу сокращённого умножения: разность квадратов, полный квадрат.
3. Если в выражении есть буква — сначала упростить, потом подставить число.
4. Проверить: ответ ОГЭ записывается целым числом или конечной десятичной дробью. Если получилось иррациональное число, где-то ошибка.

Число на прямой. Для каждого варианта найти соседние квадраты; выбрать число, которое попадает в нужный промежуток между целыми.

КАК ЭТО ВЫГЛЯДИТ В РЕШЕНИИ

Пример полного решения: $\sqrt{2^3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7^3} = \sqrt{2^4 \cdot 5^2 \cdot 7^4} = 2^2 \cdot 5 \cdot 7^2 = 980$. Показатели степеней под общим корнем стали чётными — корень извлекается нацело.

ТИПИЧНЫЕ ОШИБКИ

✗ $\sqrt{2{,}7} \cdot \sqrt{1{,}2}$ считать по отдельности	Ни один из корней не извлекается. Объединяем: $\sqrt{3{,}24} = 1{,}8$.
✗ В ответе $2\sqrt{3}$	В бланк ОГЭ такой ответ записать нельзя — выражение упрощено не до конца или есть ошибка.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЕМ

Пример 1. Найдите $\dfrac{\sqrt{48a^5}}{\sqrt{3a}}$ при $a = 1{,}5$.

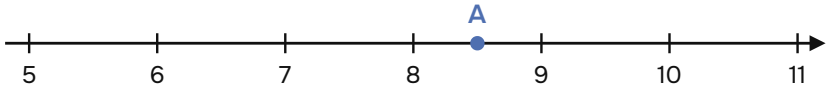
$$\sqrt{\frac{48a^5}{3a}} = \sqrt{16a^4} = 4a^2 = 4 \cdot 2{,}25 = 9.$$

Задания

A Координатная прямая

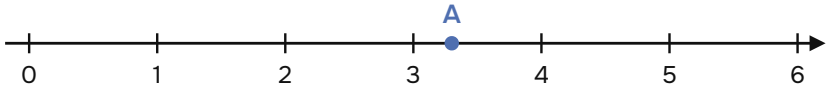
Укажите номер числа, которое отмечено на прямой точкой A.

14.1



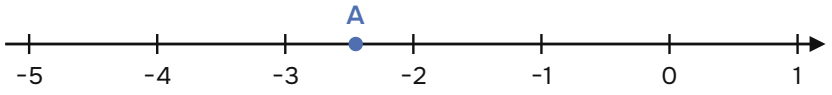
1) $\sqrt{50}$ 2) $\sqrt{61}$ 3) $\sqrt{73}$ 4) $\sqrt{87}$

14.2



1) $\sqrt{7}$ 2) $\sqrt{11}$ 3) $\sqrt{17}$ 4) $\sqrt{26}$

14.3



1) $-\sqrt{3}$ 2) $-\sqrt{6}$ 3) $-\sqrt{10}$ 4) $-\sqrt{17}$

B Значение выражения

Найдите значение выражения.

14.4 $\sqrt{2^3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7^3}$

14.5 $\sqrt{2{,}7} \cdot \sqrt{1{,}2}$

14.6 $\dfrac{\left(2\sqrt{5}\right)^2}{40}$

14.7 $\sqrt{65^2 - 56^2}$

14.8 $\dfrac{\sqrt{28} \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{0{,}16}}$

14.9 $\dfrac{\left(\sqrt{13} + \sqrt{7}\right)^2}{10 + \sqrt{91}}$

14.10 $\dfrac{\sqrt{360}}{\sqrt{10}}$

14.11 $(\sqrt{11} - \sqrt{2})(\sqrt{11} + \sqrt{2})$

14.12 $\dfrac{\sqrt{12a^3}}{\sqrt{3a}}$ при $a = 3{,}6$

14.13 $\sqrt{a^2 - 6a + 9}$ при $a = 1{,}7$

C Выбор ответа

Укажите номер верного ответа.

14.14 Какое из чисел рационально?

1) $\sqrt{0{,}4}$ 2) $\sqrt{40}$ 3) $\sqrt{0{,}04}$ 4) $\sqrt{4{,}4}$

14.15 Какое из чисел наибольшее?

1) $3\sqrt{2}$ 2) $2\sqrt{5}$ 3) $\sqrt{19}$ 4) $4{,}4$

14.16 Значение какого выражения — рациональное число?

1) $(\sqrt{6} - 3)(\sqrt{6} + 3)$ 2) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$ 3) $(\sqrt{5} - 1)^2$ 4) $\sqrt{2} + \sqrt{8}$

ЧАСТЬ IV · ОГЭ И ВЫШЕ

Задачи повышенной сложности

10 заданий

ЗАЧЕМ Задачи для тех, кто уверенно прошёл разделы 1–14. Они требуют сочетать приёмы и иногда догадаться, какой полный квадрат «спрятан» под корнем. Краткие решения — в конце тетради.

ТЕОРИЯ

Двойной радикал. Выражение $a \pm 2\sqrt{b}$ иногда является полным квадратом: $7 + 4\sqrt{3} = 4 + 2 \cdot 2\sqrt{3} + 3 = (2 + \sqrt{3})^2$. Ищем два числа m и n, у которых $m + n = a$ и $mn = b$.

Телескопическая сумма. После освобождения от иррациональности слагаемые вида $\dfrac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$ взаимно уничтожаются.

НЕ ЗАБУДЬТЕ

$\sqrt{(m \pm n)^2}$ – это $|m \pm n|$. Поэтому в двойных радикалах с минусом важно, какое из чисел больше: $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} = |3 - \sqrt{2}| = 3 - \sqrt{2}$.

Задания

A Задачи

Решите.

★.1 Упростите $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$

★.2 Упростите $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$

★.3 Вычислите $\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$

★.4 Что больше: $\sqrt{2} + \sqrt{11}$ или $\sqrt{5} + \sqrt{7}$? Калькулятором не пользуйтесь.

★.5 Вычислите $\dfrac{1}{1 + \sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}$.

★.6 Найдите наименьшее натуральное n, при котором $\sqrt{18n}$ – натуральное число.

★.7 Найдите наименьшее натуральное n, при котором $\sqrt{300n}$ – натуральное число.

★.8 Сколько существует натуральных n, при которых $\sqrt{100 - n}$ – натуральное число?

★.9 Упростите $\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}}$ при $x \geq 1$

★.10 Докажите, что $\sqrt{3}$ – иррациональное число.

Ответы

1 Квадрат числа

1.1	169	1.2	289	1.3	64	1.4	-64
1.5	0,09	1.6	0,0049	1.7	1,44	1.8	$\frac{9}{25}$
1.9	$\frac{4}{49}$	1.10	1600	1.11	625	1.12	0,0225
1.13	$2\frac{1}{4}$	1.14	$5\frac{4}{9}$	1.15	4225	1.16	0,0625
1.17	2,25	1.18	0,16	1.19	$x = \pm 7$	1.20	$x = \pm 0{,}6$
1.21	$x = \pm 1{,}1$	1.22	$x = \pm\frac{2}{3}$	1.23	$x = \pm 0{,}04$	1.24	$x = \pm 100$
1.25	$x = 0$	1.26	корней нет	1.27	да, 38^2		
1.28	нет (оканчивается на 3)			1.29	да, 57^2		
1.30	нет (оканчивается на 8)			1.31	да, 42^2		
1.32	нет: $38^2 = 1444$, $39^2 = 1521$			1.33	да, 73^2		

2 Арифметический квадратный корень

2.1	9	2.2	12	2.3	14	2.4	15
2.5	20	2.6	100	2.7	1	2.8	0
2.9	19	2.10	25	2.11	30	2.12	40
2.13	0,5	2.14	0,2	2.15	1,2	2.16	0,07
2.17	$\frac{4}{5}$	2.18	$\frac{1}{13}$	2.19	$1\frac{1}{2}$	2.20	$1\frac{1}{4}$
2.21	0,01	2.22	2,5	2.23	$2\frac{1}{3}$	2.24	0,11
2.25	нет	2.26	-4	2.27	4	2.28	нет
2.29	$-0{,}1$	2.30	нет	2.31	2	2.32	1,4
2.33	4	2.34	7	2.35	10	2.36	12
2.37	6	2.38	0,1	2.39	13	2.40	8
2.41	3	2.42	10	2.43	-1	2.44	2

3 Уравнения $x^2 = a$ и $\sqrt{x} = a$

3.1	$x = \pm 8$	3.2	$x = \pm 0{,}7$	3.3	корней нет	3.4	$x = 0$
3.5	$x = \pm\sqrt{11}$	3.6	$x = \pm 1\frac{1}{4}$	3.7	$x = \pm 0{,}03$	3.8	$x = \pm 1{,}5$
3.9	$x = \pm 3$	3.10	$x = \pm 1{,}2$	3.11	корней нет	3.12	$x = \pm\frac{1}{2}$
3.13	$x = \pm\sqrt{7}$	3.14	$x = \pm 4$	3.15	$x = 0$	3.16	$x = \pm\frac{2}{3}$
3.17	$5;\ -1$	3.18	$x = -5$	3.19	$\frac{5}{3};\ -1$	3.20	корней нет
3.21	$3{,}2;\ 2{,}8$	3.22	$2;\ -5$	3.23	$4;\ 6$	3.24	$x = 36$
3.25	$x = 0{,}09$	3.26	корней нет	3.27	$x = 25$	3.28	$x = 15$
3.29	$x = 12$	3.30	$x = \frac{1}{12}$	3.31	корней нет	3.32	14 см
3.33	150 м	3.34	4 см и 16 см	3.35	4 с	3.36	6 см
3.37	в 5 раз						

4 Иррациональные числа. Оценка и сравнение корней

4.1	$3 < \sqrt{10} < 4$	4.2	$7 < \sqrt{50} < 8$	4.3	$9 < \sqrt{99} < 10$	4.4	$12 < \sqrt{150} < 13$
4.5	$17 < \sqrt{300} < 18$	4.6	$31 < \sqrt{1000} < 32$	4.7	$0 < \sqrt{0{,}5} < 1$	4.8	$-5 < -\sqrt{20} < -4$
4.9	$2 < \sqrt{8{,}5} < 3$	4.10	$\sqrt{17} > 4$	4.11	$6 > \sqrt{35}$	4.12	$\sqrt{0{,}8} < 0{,}9$
4.13	$7 < \sqrt{50}$	4.14	$-\sqrt{26} < -5$	4.15	$\sqrt{\frac{4}{9}} < 0{,}7$	4.16	$\sqrt{2{,}25} = 1{,}5$
4.17	$1{,}4 < \sqrt{2}$	4.18	$-3 < -\sqrt{8}$	4.19	$\sqrt{8};\ 2{,}9;\ 3;\ \sqrt{10}$	4.20	$0{,}5;\ \sqrt{0{,}5};\ \sqrt{0{,}6};\ 0{,}8$
4.21	$-3;\ -\sqrt{7};\ -2{,}5;\ -\sqrt{5}$	4.22	6 (числа 4–9)	4.23	9 (от -5 до 3)	4.24	24
4.25	14	4.26	$\sqrt{0{,}04}$, $\sqrt{\frac{9}{16}}$, $\sqrt{1{,}21}$, $\sqrt{\frac{2}{8}}$			4.27	14
4.28	4,5	4.29	7,4	4.30	2,8		
4.31	$\sqrt{19}$ – B, $\sqrt{70}$ – D, $\sqrt{7}$ – A, $\sqrt{38}$ – C						

5 Функция $y = \sqrt{x}$ и её график

5.1	да	5.2	да	5.3	нет	5.4	нет
5.5	нет	5.6	да	5.7	да	5.8	нет
5.9	0,9	5.10	1,4	5.11	$\frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$	5.12	144
5.13	0,09	5.14	такого x нет	5.15	$x \geq 3$	5.16	$x \leq 5$
5.17	$x \geq -4$	5.18	$x \leq 0$	5.19	любое x	5.20	только $x = 0$
5.21	$0 \leq x \leq 4$	5.22	$x \geq \frac{1}{3}$	5.23	2 и 5	5.24	0,3 и 1
5.25	0 и 0,8	5.26	0,5 и 2,5	5.27	$(0;\ 0)$ и $(1;\ 1)$	5.28	$(9;\ 3)$
5.29	$(4;\ 2)$	5.30	$a = 49$	5.31	$a = 5$		

6 Корень из произведения и из частного

6.1	20	6.2	1,8	6.3	42	6.4	6
6.5	20	6.6	1,3	6.7	5,6	6.8	4
6.9	9	6.10	2	6.11	6	6.12	30
6.13	60	6.14	2	6.15	10	6.16	$\frac{1}{2}$
6.17	$\frac{7}{11}$	6.18	$1\frac{3}{5}$	6.19	4,5	6.20	6
6.21	7	6.22	3	6.23	$\frac{1}{6}$	6.24	5
6.25	$\frac{1}{3}$	6.26	16	6.27	13	6.28	120
6.29	25	6.30	6	6.31	6	6.32	42
6.33	72	6.34	105	6.35	72	6.36	63
6.37	50						

7 Корень из квадрата: $\sqrt{a^2} = |a|$

7.1	12	7.2	0,3	7.3	-4	7.4	9
7.5	8	7.6	8	7.7	625	7.8	0,01
7.9	$-x$	7.10	$2a$	7.11	$-3y$	7.12	a^2
7.13	$-x^3$	7.14	$-4a^4b$	7.15	$3c$	7.16	$5m$
7.17	$-0{,}7p^5$	7.18	$3 - \sqrt{7}$	7.19	2	7.20	4
7.21	$\sqrt{2} - 1$	7.22	1	7.23	$x - 5$	7.24	-1

7.25	$1-2x$	7.26	3	7.27	4		

8 Вынесение множителя из-под знака корня

8.1	$2\sqrt{2}$	8.2	$2\sqrt{3}$	8.3	$3\sqrt{2}$	8.4	$2\sqrt{5}$
8.5	$3\sqrt{3}$	8.6	$4\sqrt{2}$	8.7	$3\sqrt{5}$	8.8	$4\sqrt{3}$
8.9	$5\sqrt{3}$	8.10	$7\sqrt{2}$	8.11	$10\sqrt{2}$	8.12	$10\sqrt{3}$
8.13	$2\sqrt{7}$	8.14	$5\sqrt{5}$	8.15	$6\sqrt{2}$	8.16	$\sqrt{7}$
8.17	$\sqrt{3}$	8.18	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	8.19	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	8.20	$0{,}2\sqrt{2}$
8.21	$0{,}2\sqrt{3}$	8.22	$-\sqrt{2}$	8.23	$3\sqrt{a}$	8.24	$a\sqrt{a}$
8.25	$2a\sqrt{2b}$	8.26	$5a^2\sqrt{2a}$	8.27	$a^3b^2\sqrt{a}$	8.28	$2b\sqrt{3a}$
8.29	$20\sqrt{3}$	8.30	$0{,}06\sqrt{2}$	8.31	$15\sqrt{3}$	8.32	$12\sqrt{7}$
8.33	$12\sqrt{6}$	8.34	$9\sqrt{2}$				

9 Внесение множителя под знак корня. Сравнение

9.1	$\sqrt{18}$	9.2	$\sqrt{75}$	9.3	$\sqrt{28}$	9.4	$\sqrt{3}$
9.5	$-\sqrt{20}$	9.6	$\sqrt{3}$	9.7	$\sqrt{8}$	9.8	$\sqrt{3}$
9.9	$3\sqrt{5} > 2\sqrt{11}$	9.10	$2\sqrt{6} < 3\sqrt{3}$	9.11	$7\sqrt{2} > 4\sqrt{6}$	9.12	$\frac{1}{2}\sqrt{20} = \frac{1}{3}\sqrt{45}$
9.13	$-5\sqrt{2} < -4\sqrt{3}$	9.14	$6\sqrt{0{,}5} > 0{,}5\sqrt{70}$	9.15	$2\sqrt{13} < 3\sqrt{6}$	9.16	$\frac{2}{3}\sqrt{18} > \frac{3}{4}\sqrt{8}$
9.17	$2\sqrt{6};\ 5;\ \sqrt{26};\ 3\sqrt{3}$	9.18	$5;\ 3\sqrt{3};\ 2\sqrt{7};\ 4\sqrt{2}$	9.19	$-3\sqrt{2};\ -4;\ -2\sqrt{3}$	9.20	$\sqrt{3b^2}$
9.21	$-\sqrt{2c^2}$	9.22	$\sqrt{5x}$				

10 Подобные радикалы: сложение и вычитание

10.1	$11\sqrt{3}$	10.2	$-3\sqrt{5}$	10.3	$3\sqrt{2}$	10.4	$2\sqrt{7}$
10.5	$5\sqrt{11}$	10.6	$\frac{5}{6}\sqrt{3}$	10.7	$5\sqrt{2}$	10.8	$\sqrt{2}$
10.9	$4\sqrt{5}$	10.10	$2\sqrt{2}$	10.11	$\sqrt{3}$	10.12	$4\sqrt{3}$
10.13	$2\sqrt{2}$	10.14	$5\sqrt{2}$	10.15	$4\sqrt{5}$	10.16	$6\sqrt{3}$
10.17	$2\sqrt{3}$	10.18	$4\sqrt{2}$	10.19	$\sqrt{2}$	10.20	$3\sqrt{3}$
10.21	$7\sqrt{a}$	10.22	$6x\sqrt{x}$	10.23	$2a\sqrt{a}$	10.24	0

11 Умножение выражений с корнями. Формулы сокращённого умножения

11.1	3	11.2	15	11.3	-12	11.4	$2+3\sqrt{2}$
11.5	$7-2\sqrt{7}$	11.6	30	11.7	2	11.8	1
11.9	1	11.10	6	11.11	14	11.12	$a-b$
11.13	$3+2\sqrt{2}$	11.14	$7-2\sqrt{10}$	11.15	$7-4\sqrt{3}$	11.16	10
11.17	11	11.18	11	11.19	5	11.20	10
11.21	2	11.22	1	11.23	3	11.24	2

12 Освобождение от иррациональности в знаменателе

12.1	$2\sqrt{3}$	12.2	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	12.3	$\frac{3\sqrt{5}}{2}$	12.4	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
12.5	$\sqrt{2}$	12.6	$2\sqrt{7}$	12.7	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	12.8	$\sqrt{2}-1$
12.9	$\sqrt{5}+1$	12.10	$\sqrt{7}+\sqrt{6}$	12.11	$\sqrt{3}-1$	12.12	$\sqrt{10}+\sqrt{7}$
12.13	$2\sqrt{3}-1$	12.14	4	12.15	$\sqrt{3}$	12.16	2

12.17 0

13 Сокращение дробей с корнями

13.1	$\sqrt{5}$	13.2	$\sqrt{5}-1$	13.3	$\sqrt{2}+1$	13.4	$\sqrt{2}$
13.5	$\sqrt{3}$	13.6	$\sqrt{a}+4$	13.7	$\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}$	13.8	$\sqrt{x}+1$
13.9	$\sqrt{a}-\sqrt{b}$	13.10	$\sqrt{y}-3$	13.11	$3-\sqrt{x}$	13.12	$\sqrt{m}+\sqrt{n}$
13.13	$x+\sqrt{x}+1$						

14 Задания в формате ОГЭ

14.1	3	14.2	2	14.3	2	14.4	980
14.5	1,8	14.6	0,5	14.7	33	14.8	35
14.9	2	14.10	6	14.11	9	14.12	7,2
14.13	1,3	14.14	3	14.15	2	14.16	1

★ Задачи повышенной сложности

★.1	$2+\sqrt{3}$	★.2	$3-\sqrt{2}$	★.3	2	★.4	$\sqrt{5}+\sqrt{7}$
★.5	9	★.6	2	★.7	3	★.8	9
★.9	$\sqrt{x-1}+1$	★.10	см. решения				

✎ Решения трудных заданий

★.1 $7+4\sqrt{3}=4+4\sqrt{3}+3=(2+\sqrt{3})^2$, корень равен $2+\sqrt{3}$.

★.2 $11-6\sqrt{2}=9-2\cdot3\sqrt{2}+2=(3-\sqrt{2})^2$; так как $3>\sqrt{2}$, ответ $3-\sqrt{2}$.

★.3 $6\pm2\sqrt{5}=(\sqrt{5}\pm1)^2$, разность $(\sqrt{5}+1)-(\sqrt{5}-1)=2$.

★.4 Обе суммы положительны, сравниваем квадраты: $13+2\sqrt{22}$ и $12+2\sqrt{35}$, то есть $1+2\sqrt{22}$ и $2\sqrt{35}$. Снова квадраты: $89+4\sqrt{22}$ и 140, то есть $4\sqrt{22}$ и 51: $352<2601$. Больше $\sqrt{5}+\sqrt{7}$.

★.5 $\dfrac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$. Сумма равна $\sqrt{100}-\sqrt{1}=9$.

★.6–7 $18n=2\cdot3^2\cdot n$ — нужен ещё множитель 2, $n=2$. $300n=2^2\cdot3\cdot5^2\cdot n$ — нужен множитель 3, $n=3$.

★.8 $100-n=k^2$, k — натуральное, $n\ge1$: $k=1,\dots,9$. Девять значений n: 99, 96, 91, 84, 75, 64, 51, 36, 19.

★.9 $x+2\sqrt{x-1}=(x-1)+2\sqrt{x-1}+1=(\sqrt{x-1}+1)^2$, ответ $\sqrt{x-1}+1$.

★.10 Пусть $\sqrt{3}=\dfrac{m}{n}$ — несократимая дробь. Тогда $m^2=3n^2$, m^2 делится на 3, значит и m делится на 3: $m=3k$. Тогда $9k^2=3n^2$, $n^2=3k^2$ — и n делится на 3. Дробь сократима — противоречие.

7.27 $\sqrt{(x-4)^2}+\sqrt{x^2}=|x-4|+|x|=(4-x)+x=4$ при $0<x<4$.

13.13 Разность кубов: $x\sqrt{x}-1=(\sqrt{x})^3-1=(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)$.